

§ 24 Messbare Funktionen

Def 24.1 Sei X eine beliebige Menge,

λ ein äußeres Maß auf X :

Y sei ein metrischer (oder topologischer)

Raum. Eine Abbildung

$f: X \rightarrow Y$ heißt λ -messbar,

falls

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &\in \mathcal{M}_\lambda \\ \forall O_{\text{offen}} &\subset Y \end{aligned}$$

Bem: ① Analogie zur Stetigkeitsdef!

① Setze $\mathcal{U}_\lambda := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_\lambda\}$

Dann gilt (ohne jede Voraussetzung an φ): -249-

- $\mathcal{V}$ ist stets eine σ -Algebra
(Rechenregeln für Urbilder)

- Ist φ λ -messbar, so
gilt $\emptyset \in \mathcal{V} \quad \forall \text{ Öffnen } \subset X$,
also:

$$\boxed{\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{V}}$$

Borel σ -Algebra von X

② "Messbarkeit von φ " hängt nicht
nur vom Maß λ ab: Auch die auf
 X gewählte Metrik (Topologie) geht ein!

③ Sei $Y = \mathbb{R}$. Zeige:

$$(i) \quad M \in \mathcal{M}_\lambda \iff \chi_M \text{ ist } \lambda\text{-messbar}$$

$$(ii) \quad f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \lambda\text{-messbar}$$

$$\iff f^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{M}_\lambda \quad \forall t \in \mathbb{Q}$$

$$\iff f^{-1}([r, t]) \in \mathcal{M}_\lambda \quad \forall r, t \in \mathbb{Q}$$

beachte hierzu für " $\Leftarrow$ ": Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ lässt sich schreiben als abzählbare Operation mit den Bildungen
 $\cup, \cap, -$

von Intervallen z.B. vom Typ

$$(-\infty, t] \quad , \quad t \in \mathbb{Q}.$$

Dann benutze wieder Regeln für f^{-1} .

Natürlich ist jedes andere vernünftige System von Intervallen zulässig, etwa

$$(a, b), \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

④ Funktionen

$$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$$

mit Wert auch $\pm \infty$:

f λ -messbar: $\iff$

$$f^{-1}(I), f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{M}_\lambda$$

für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Satz 24.1: (Rechenregeln)

Sei λ Maß auf X .

(i) $f, g: X \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ λ -messbar

$$\Rightarrow \begin{cases} f+g, f \cdot g, |f|, \min\{f, g\}, \\ \max\{f, g\} \text{ } \lambda\text{-messbar;} \\ f/g \text{ } \lambda\text{-messbar, falls } g(x) \neq 0. \end{cases}$$

(ii) $f_k: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ -messbar

für $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\inf_k f_k, \sup_k f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k,$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ } \lambda\text{-messbar}$$

(iii) Seien Y, Z topologische

Räume, $g: Y \rightarrow Z$ sei stetig

und $f: X \rightarrow Y$ λ -messbar.

Dann ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ λ -messbar.

(iv) $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ λ -messbar

$\iff$ jede Komponente $-||-$

auch

Bem: 1) In (i) sind $\checkmark$ Funktionen mit Werten

in $\overline{\mathbb{R}}$ zugelassen; wenn keine Terme

der Form $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ auf-

treten.

2) Falls $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$
für alle $x \in X$ existiert, so ist f λ -messbar.

Beweis: (i) Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$(f+g)^{-1}(-\infty, a) =$$

$$\bigcup_{\substack{\tau, \rho \in \mathbb{Q} \\ \tau + \rho < a}} \left(f^{-1}(-\infty, \tau) \cap g^{-1}(-\infty, \rho) \right),$$

und die Menge rechts gehört zu $\mathcal{M}_\lambda$.

ad $(*)$:

1.) $x \in$ rechte Menge, also

$$f(x) < \tau \text{ und } g(x) < \rho$$

für gewisse $\tau, \rho \in \mathbb{Q}$, $\tau + \rho < a$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) < \tau + \rho < a, \text{ also}$$

$x \in$ linke Menge

2.) $x \in \underline{\text{linke Menge}}$, also

$$f(x) + g(x) < a.$$

Setze $\varepsilon := a - (f(x) + g(x))$ und

wähle $r, \rho \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) < r < f(x) + \varepsilon/3, \\ g(x) < \rho < g(x) + \varepsilon/3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(-\infty, r) \text{ und } \in g^{-1}(-\infty, \rho)$$

sowie $r + \rho < f(x) + g(x) + \frac{2}{3}\varepsilon$

$$= \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}(f(x) + g(x)) < \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = a$$

Also: $x \in \underline{\text{rechte Menge}}$

Damit ist $\otimes$ gezeigt $\implies$

$f+g$ λ -messbar.

Als nächstes: λ -Messbarkeit von f^2

$a \geq 0$: $(f^2)^{-1}(-\infty, a) =$

$$f^{-1}(-\infty, \sqrt{a}) \cap f^{-1}(-\sqrt{a}, \infty)$$

↑ ↑
messbar

$a < 0$: $(f^2)^{-1}(-\infty, a) = \emptyset$

Also: $\forall a \in \mathbb{R}: (f^2)^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{M}_\lambda$

Damit zeigen wir:

λ -Messbarkeit von $f \cdot g$:

$$\text{Es gilt } f \cdot g = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

Für den Rest von (i) benutze u.a.:

$$f^+ := \max \{0, f\} = f \cdot \chi_{f^{-1}([0, \infty))},$$

$$f^- := -f \cdot \chi_{f^{-1}((-\infty, 0])} ;$$

rechte Seiten sind messbar, da $\chi_{\dots}$ messbar.

$$\text{Weiter gilt: } |f| = f^+ + f^- ,$$

$$\max \{f, g\} = (f - g)^+ + g, \dots$$

-258-

ii) Sei $f_k: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Folge λ -messbarer Funktionen. Es gilt:

$$\left(\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} \left(\underline{[-\infty, a)} \right) =$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1} \left(\underline{[-\infty, a)} \right),$$

$$\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} \left(\underline{[-\infty, a]} \right) =$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1} \left(\underline{[-\infty, a]} \right)$$

$\Rightarrow \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ messbar

beachte weiter

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{m \geq 1} \left\{ \inf_{k \geq m} f_k \right\},$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k = \inf_{m \geq 1} \left\{ \sup_{k \geq m} f_k \right\}.$$

oder $\lim_{m \rightarrow \infty} \{ \dots \}$

(iii) Sei $g: Y \rightarrow Z$ stetig,

$f: X \rightarrow Y$ messbar $\implies$

$$\forall \emptyset \subset Z \text{ offen: } (g \circ f)^{-1}(\emptyset) =$$

$$f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(\emptyset)}_{\text{offen}}) \in \mathcal{M}_X$$

(iv) selbst!

